

Études mathématiques
Niveau moyen
Épreuve 2

Mercredi 11 mai 2016 (matin)

1 heure 30 minutes

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours d'études mathématiques NM** est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions dans le livret de réponses fourni.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[90 points]**.

Répondez à **toutes** les questions dans le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse.

1. [Note maximale : 14]

On a interrogé 180 personnes et on leur a demandé quels moyens de transport elles avaient utilisés au cours de l'année dernière parmi l'avion (A), le train (T) ou l'autobus (B). Les informations suivantes ont été recueillies.

47 avaient pris l'avion
68 avaient pris le train
122 avaient pris l'autobus
25 avaient pris l'avion et le train
32 avaient pris l'avion et l'autobus
35 avaient pris le train et l'autobus
20 avaient pris les trois moyens de transport

- (a) Dessinez un diagramme de Venn pour représenter les informations ci-dessus. [4]
- (b) Trouvez le nombre de personnes qui, au cours de l'année dernière, avaient pris
- (i) l'autobus seulement ;
 - (ii) l'avion et l'autobus, mais pas le train ;
 - (iii) au moins deux de ces moyens de transport ;
 - (iv) aucun de ces trois moyens de transport. [6]

Une personne est choisie au hasard parmi celles ayant été interrogées.

- (c) Trouvez la probabilité que cette personne ait utilisé seulement un moyen de transport au cours de l'année dernière. [2]
- (d) Étant donné que cette personne a utilisé seulement un moyen de transport au cours de l'année dernière, trouvez la probabilité que cette personne ait pris l'avion. [2]

2. [Note maximale : 15]

Prachi est en vacances aux États-Unis. Elle visite le Grand Canyon.

Lorsqu'elle atteint le sommet, elle laisse tomber une pièce de monnaie du haut d'une falaise. La pièce tombe d'une distance de 5 mètres durant la première seconde, de 15 mètres durant la deuxième seconde, de 25 mètres durant la troisième seconde, et continue à tomber de cette façon. Les distances parcourues chaque seconde par la pièce lors de sa chute forment une suite arithmétique.

- (a) (i) Écrivez la raison, d , de cette suite arithmétique.
- (ii) Écrivez la distance parcourue par la pièce durant la quatrième seconde de sa chute. [2]
- (b) Calculez la distance parcourue par la pièce durant la 15^e seconde de sa chute. [2]
- (c) Calculez la distance **totale** parcourue par la pièce au cours des 15 premières secondes. Donnez votre réponse en kilomètres. [3]

Prachi laisse tomber la pièce de monnaie d'une hauteur de 1800 mètres au-dessus du sol.

- (d) Calculez le temps, à la seconde près, que prendra la pièce pour atteindre le sol. [3]

Prachi visite le centre touristique qui se trouve à proximité. Il a ouvert ses portes au début de l'année 2015 et il y a eu 17 000 visiteurs au cours de la première année. On s'attend à ce que le nombre de personnes qui visitent le centre touristique augmente de 10% chaque année.

- (e) Calculez le nombre de visiteurs attendus en 2016. [2]
- (f) Calculez le nombre total de visiteurs attendus au cours des 10 premières années depuis l'ouverture du centre touristique. [3]

3. [Note maximale : 11]

Un radar de vitesse sur Peterson Road enregistre la vitesse de chaque véhicule qui passe. Les vitesses sont normalement distribuées, avec une moyenne de 67 km h^{-1} et un écart type de $3,4 \text{ km h}^{-1}$.

- (a) Esquissez un diagramme de cette distribution normale et hachurez la région qui représente la probabilité que la vitesse d'un véhicule soit entre 60 et 70 km h^{-1} . [2]

Un véhicule circulant sur Peterson Road est choisi au hasard.

- (b) Trouvez la probabilité que la vitesse de ce véhicule soit
- (i) supérieure à 60 km h^{-1} ;
 - (ii) inférieure à 70 km h^{-1} ;
 - (iii) entre 60 et 70 km h^{-1} . [3]

On a trouvé que 19% des véhicules dépassent la vitesse maximale autorisée de $s \text{ km h}^{-1}$.

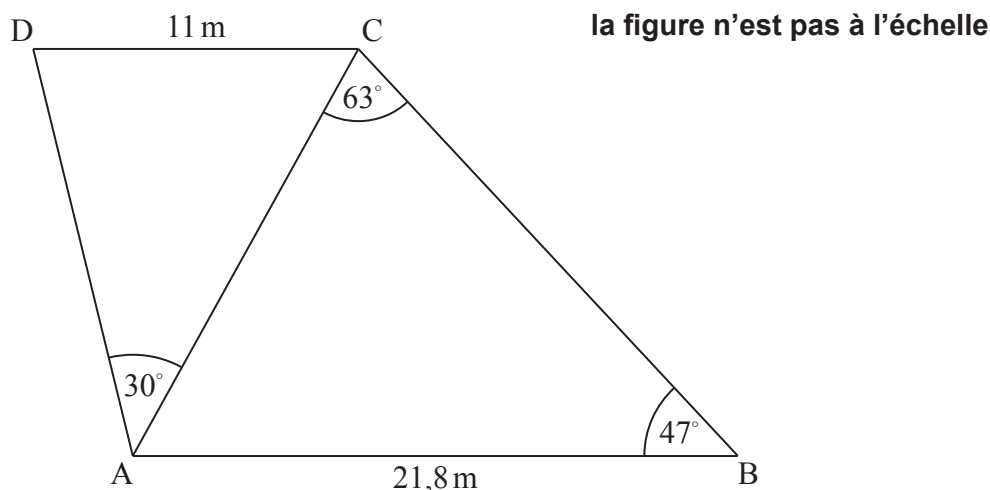
- (c) Trouvez la valeur de s , en donnant votre réponse correcte à l'entier le plus près. [2]

Il y a une contravention de 65 USD pour un excès de vitesse sur Peterson Road. Lors d'une journée en particulier, la valeur totale des contraventions données a été de 14 820 USD.

- (d) (i) Calculez le nombre de contraventions qui ont été données au cours de cette journée.
- (ii) Estimez le nombre total de véhicules ayant passé devant le radar de vitesse sur Peterson Road au cours de cette journée. [4]

4. [Note maximale : 16]

Vu de dessus, un terrain de jeu est en forme de quadrilatère, ABCD, où $AB = 21,8\text{ m}$ et $CD = 11\text{ m}$. On a mesuré trois des angles internes et l'angle $ABC = 47^\circ$, l'angle $ACB = 63^\circ$ et l'angle $CAD = 30^\circ$. Ces informations sont représentées dans le diagramme suivant.



(a) Calculez la distance AC. [3]

(b) Calculez l'angle ADC. [3]

Il y a un arbre en C, perpendiculaire au sol. L'angle d'élévation au sommet de l'arbre à partir de D est de 35° .

(c) Calculez la hauteur de l'arbre. [2]

Chavi estime que la hauteur de l'arbre est de 6 m.

(d) Calculez le pourcentage d'erreur dans l'estimation de Chavi. [2]

Chavi fête son anniversaire au terrain de jeu avec ses amis. Sa mère apporte une bouteille de jus d'orange de 2 litres pour partager entre les invités. Elle apporte également des gobelets en papier de **forme conique**.

Chaque gobelet a une hauteur verticale de 10 cm et le dessus du gobelet a un diamètre de 6 cm.

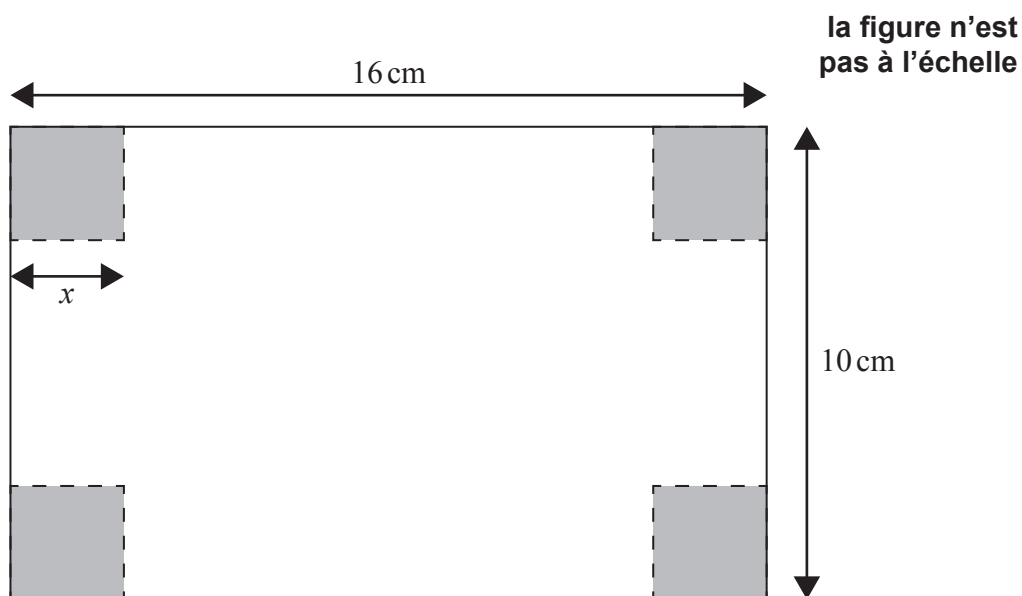
(e) Calculez le volume d'un gobelet en papier. [3]

(f) Calculez le nombre maximal de gobelets pouvant être complètement remplis avec la bouteille de jus d'orange de 2 litres. [3]

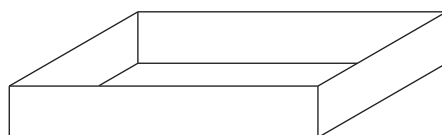
5. [Note maximale : 19]

Hugo reçoit une feuille rectangulaire de carton mince mesurant 16 cm par 10 cm. Il décide de concevoir un plateau à partir de celle-ci.

Il enlève à chaque coin les carrés grisés de côté x cm, tel qu'indiqué dans le diagramme suivant.



Le reste du carton est plié afin de former le plateau, tel qu'indiqué dans le diagramme suivant.



la figure n'est pas à l'échelle

(a) Écrivez, **en fonction de x** , la longueur et la largeur du plateau. [2]

(b) (i) Indiquez si x peut avoir une valeur de 5. Donnez une raison justifiant votre réponse.

(ii) Écrivez l'intervalle des valeurs possibles de x . [4]

(c) Montrez que le volume, $V \text{ cm}^3$, de ce plateau est donné par

$$V = 4x^3 - 52x^2 + 160x. \quad [2]$$

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 5)

- (d) Trouvez $\frac{dV}{dx}$. [3]
- (e) **En utilisant votre réponse de la partie (d)**, trouvez la valeur de x qui maximise le volume du plateau. [2]
- (f) Calculez le volume maximal du plateau. [2]
- (g) Esquissez la représentation graphique de $V = 4x^3 - 52x^2 + 160x$, pour les valeurs possibles de x trouvées dans la partie (b)(ii), et $0 \leq V \leq 200$. Légendez clairement le point correspondant au maximum. [4]

6. [Note maximale : 15]

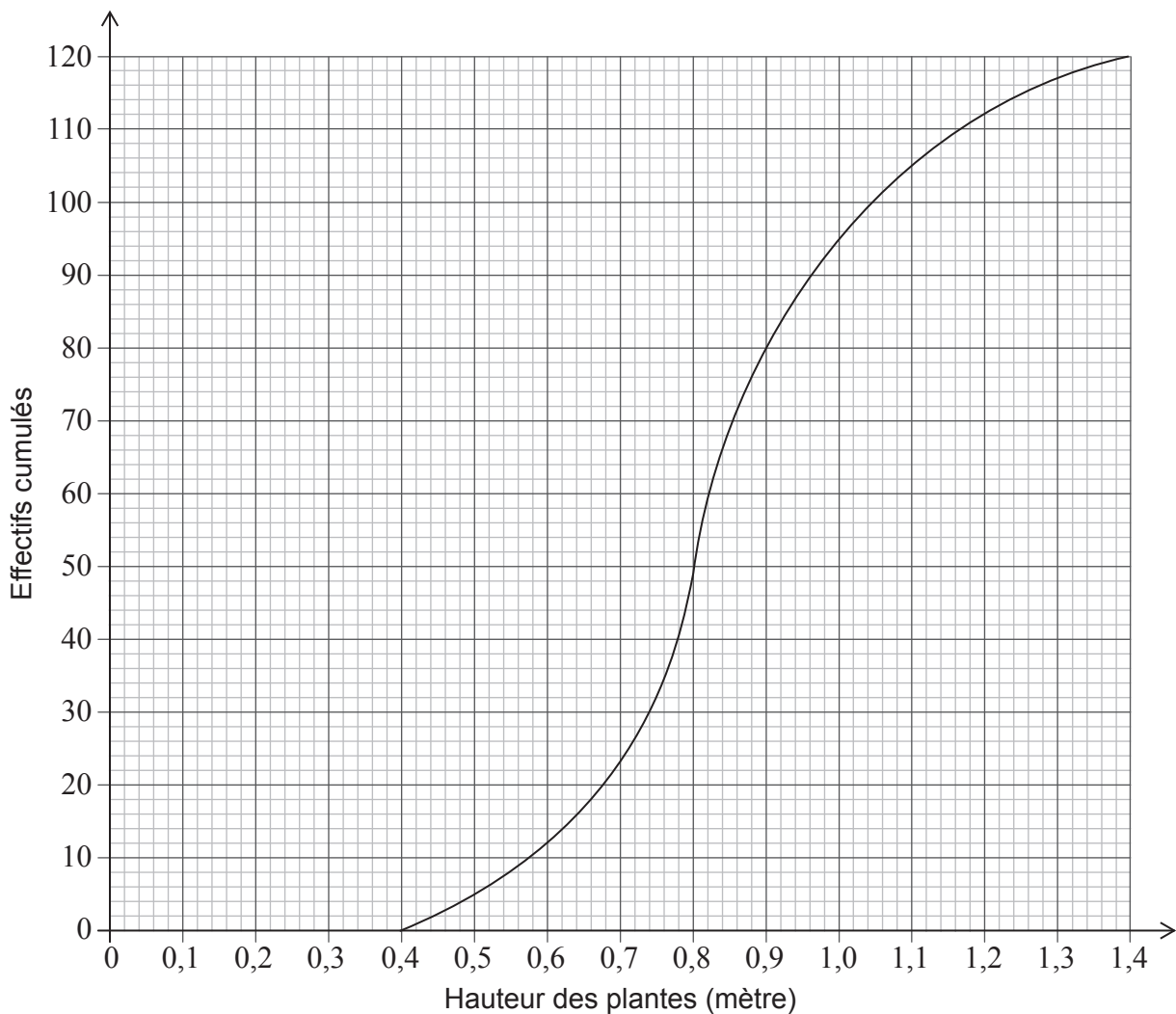
Le tableau ci-dessous présente le nombre et la hauteur (h), en mètre, de plantes cultivées dans le cadre d'un projet scolaire.

Hauteur, h (mètre)	Effectifs	Effectifs cumulés
$0,40 \leq h < 0,60$	12	12
$0,60 \leq h < 0,80$	37	49
$0,80 \leq h < 1,00$	46	p
$1,00 \leq h < 1,20$	17	112
$1,20 \leq h < 1,40$	8	120

(a) Écrivez la valeur de p .

[1]

Ces informations sont représentées sur la courbe des effectifs cumulés suivante.



(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

- (b) Utilisez la courbe pour trouver la hauteur médiane des plantes. [1]

À la fin du projet, l'établissement scolaire offrira certaines de ces plantes à un organisme de charité local, Greentrust, et en replantera d'autres dans le jardin de l'établissement scolaire.

Toutes les plantes dont la hauteur est supérieure à 1,14 mètre seront replantées dans le jardin de l'établissement scolaire.

- (c) Utilisez la courbe pour trouver le nombre de plantes qui seront replantées dans le jardin de l'établissement scolaire. [3]

Toutes les plantes dont la hauteur est supérieure au premier quartile et inférieure au troisième quartile seront offertes à Greentrust.

- (d) Écrivez le nombre de plantes qui seront offertes à Greentrust. [1]

L'étendue des hauteurs des plantes offertes à Greentrust est $a < h < 0,96$.

- (e) Écrivez la valeur de a . [1]

La plus petite plante mesure 0,45 mètre et la plus haute mesure 1,35 mètre.

- (f) Dessinez un diagramme en boîte à moustaches pour ces données sur du papier quadrillé, en utilisant une échelle de 1 cm pour représenter 0,1 mètre. [4]

Greentrust a reçu un total de 180 plantes de la part des établissements scolaires locaux et a décidé de les vendre au marché. Greentrust a payé 12 euros pour louer un emplacement sur le marché afin de vendre les plantes. À la fin de la journée, Greentrust a réalisé un profit de 420 euros.

- (g) Calculez le prix de vente d'une plante, en euros, si $\frac{3}{4}$ des plantes ont été vendues et que toutes les plantes se vendaient au même prix. [4]